

Abstract:

In order to do a good estimation of the pores pressures in earth dams. A finite element numerical program was elaborated for the analysis of steady flows with free surface through earth dams, considering the flow in the unsaturated zone above the free surface.
 The relative permeability and water content in the unsaturated zone where the pore pressure is negative are approximated by continuous functions. These one were calculated in gauss's points inside the finite element. The hydraulic non linearity is treated iteratively by fixing point method.
 The water table and flow nets are located in finite element by interpolation between nodal values of pressures or heads. The comparison of the present results with other numerical and experimental ones shows the efficiency of our software.

Résumé :

Afin de mieux estimer les pressions interstitielles dans les barrages en terre, un programme de calcul numérique par éléments finis a été élaboré pour l'analyse des écoulements permanents en présence de surface libre à travers les barrages en terre, en tenant compte de l'écoulement dans la zone non saturée définie au dessus de la surface libre.
 La perméabilité relative et la teneur en eau dans cette zone où la pression interstitielle est négative, sont approchées par des fonctions continues de pressions interstitielles. Celles-ci sont calculées aux points de Gauss à l'intérieur de l'élément fini.
 La non linéarité hydraulique provoquée sera traitée par la méthode de point fixe.
 La surface libre et le réseau d'écoulement sont déterminés à l'intérieur de l'élément fini par interpolation linéaire entre les valeurs nodales des pressions ou des charges.
 La confrontation des présents résultats avec d'autres résultats numériques ou expérimentaux a montré l'efficacité de notre programme.

Mots clés: barrage en terre, éléments finis, écoulement à surface libre

1. Introduction générale :

La résolution du problème de l'écoulement permanent en milieu poreux par la méthode des éléments finis, a commencé par (Zienkiewicz et al., 1969)

Le problème de l'écoulement en milieu poreux permanent à surface libre est non linéaire, sa résolution nécessite l'utilisation des méthodes itératives. A travers l'étude bibliographique, on distingue deux groupes d'auteurs ; le premier groupe considère que la surface libre est la limite supérieure de l'écoulement d'où on néglige la zone non saturée. Une méthode itérative à maillage variable est proposée pour la résolution de ce type de problème (Smith et Griffiths, 1988), (Cividini A et Gioda., 1989), (Humbert, 1984). L'autre méthode consiste à fixer le maillage et faire varier la rigidité (Humbert, 1984), (Neuman et Witherspoon, 1970), (Neuman, 1973), (Dessai., 1984), (Ould amy et Magnan, 1991), (Lacy et Prevost, 1987) et (Bathé et Khoshgoftaar., 1979).

Dans cette étude, on a utilisé la deuxième méthode, qui consiste à fixer le maillage et faire varier la rigidité, en effet, la matrice de perméabilité est fonction de la charge hydraulique, la méthode du point fixe est utilisée pour traiter la non linéarité y engendrée.

2. Formulation théorique des écoulements en milieux poreux saturé et non saturé

L'écoulement en milieu poreux saturé et non saturé (à surface libre) est régi par l'équation de RICHARDS :

$$C(p) \frac{\partial h}{\partial t} = \text{div}(K_{sat} K_r(p) \text{grad} h) \quad (1)$$

avec $C(p) = \frac{\partial \theta}{\partial p}$ est la capacité capillaire (θ) en tenant compte des hypothèses suivantes:

- Le milieu poreux est partiellement saturé ;
- L'eau est incompressible ;
- Les vides de la matrice poreuse sont occupés par deux phases : l'eau et l'air
- L'air forme une phase continue avec l'atmosphère sous une pression uniforme.

L'équation de RICHARDS est fortement non linéaire. La non linéarité intervient dans les coefficients de perméabilité relative et de capacité capillaire, qui sont en fonction de la pression interstitielle dans la zone non saturée. L'équation de RICHARDS en régime permanent s'écrit :

$$\text{div}(K_{sat} K_r(p) \text{grad} h) = 0 \quad (2)$$

3. Application de l'écoulement à surface libre à un barrage en terre:

Les conditions aux limites dans un barrage en terre sont :
 Celles qui s'appliquent sur des limites connues figure 1 :

- $H = h(p)$, sur S_h (Charge imposée)
- $H = h'(p)$, sur S_k (Charge imposée)
- $-k^j \frac{\partial h}{\partial x_j} n_i = f(p)$, sur S_f (Flux imposé)

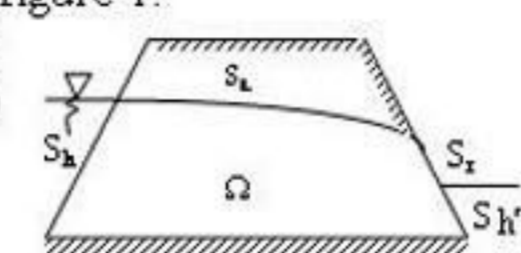


Figure 1 Conditions aux limites dans un barrage en terre homogène

o Celles qui s'appliquent sur les limites inconnues (surface libre S_l et surface de suintement S_s):

- $h = z(p)$, sur S_l et S_s (Pression nulle ou atmosphérique)
- $-k^j \frac{\partial h}{\partial x_j} n_i = 0$, sur S_l (Flux nul)

La non saturation du milieu poreux pouvait être traduite par une non linéarité du tenseur de perméabilité.

La fonction de perméabilité relative en fonction de la pression interstitielle est donnée par (M.Vauclin, 1976) expérimentalement

$$k_r(p) / k_{sat} = \begin{cases} \frac{A_1}{A_1 + (-p)^{B_1}} & \text{si } p < 0 \\ 1 & \text{si } p \geq 0 \end{cases}$$

4. Application de la méthode des éléments finis à l'écoulement permanent à surface libre :

• Formulation variationnelle :

Le tenseur de perméabilité anisotrope s'écrit : $k = \begin{bmatrix} k^{11} & k^{12} \\ k^{21} & k^{22} \end{bmatrix}$

L'équation de Richards s'écrit en terme d'espace et en régime permanent :

$$-\text{div} \left[k^j \frac{\partial h}{\partial x_j} \right] = 0 \quad (3)$$

Le fonctionnel associé est donné par (Humbert, 1984)

$$I(h) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} k^j \frac{\partial h}{\partial x_j} \frac{\partial h}{\partial x_j} d\Omega - \int_{S_f} h f ds \quad (4)$$

Le dernier terme décrit le flux imposé sur S_f (condition de Neuman)

• Formulation matricielle :

La charge hydraulique à l'intérieur de l'élément fini est donnée en fonction des charges nodales :

$$h = [N]^T \{h_n\} \quad (5)$$

$N_L = J N_G$
 J : Matrice Jacobienne,
 N_L, N_G : matrices des fonctions d'interpolation locale et globale respectivement

L'élément de surface $d\Omega$, s'écrit :

$$d\Omega = |J| d\zeta d\eta$$

ζ, η : coordonnées locales
 x_i : coordonnées globales

La fonctionnelle élémentaire s'écrit :

$$I_e(h) = \frac{1}{2} h_e^T \left[\int_{\Omega_e} N_G^T k N_G d\Omega_e \right] h_e - \int_{S_f} f N_G ds_e \quad (6)$$

$$\text{si on pose } \begin{cases} K_{SE} = \int_{\Omega_e} (J^{-1} N_L)^T k J^{-1} N_L |J| d\zeta d\eta \\ F_{SE}^f = \int_{S_f} f N_G ds_e \end{cases}$$

$$\text{Alors } I_e(h) = \frac{1}{2} h_e^T K_{SE} h_e - F_{SE}^f h_e$$

La minimisation de $I_e(h)$ conduit à calculer $\delta I_e(h)$

$$\delta I_e = h_e^T K_{SE} \delta h_e - F_{SE}^f \delta h_e$$

$$\delta I_e(h) = 0 \text{ pour } \delta h_e \text{ admissible nous donne : } K_{SE} h_e = F_{SE}^f \quad (7)$$

Avec :

K_{SE} : matrice de rigidité élémentaire
 F_{SE}^f : Vecteur force de surface élémentaire

Après assemblage on trouve le système global :

$$K_G(h) h_G = F_G \quad (8)$$

C' est un système non linéaire symétrique.

5. Méthode de résolution :

La surface libre est inconnue du problème, sa détermination nécessite l'utilisation d'une méthode itérative. On choisit la méthode de point fixe.

Nous fixons la position de la surface libre à la première itération et nous cherchons la nouvelle position à la prochaine itération en imposant les conditions aux limites au niveau de la surface libre et la surface de suintement. Le calcul de la matrice de rigidité se fait aux points de Gauss à l'intérieur de l'élément fini en calculant les pressions interstitielles en ces points.

L'élément fini utilisé dans notre programme est de type isoparamétrique à quatre nœuds

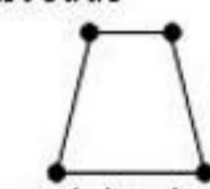


Fig 2 Éléments finis isoparamétriques à quatre nœuds

6. Traitement numérique des conditions aux limites sur la surface de suintement : définie comme étant des zones de ruissellement de potentiel dont le traitement exige une méthode numérique suivante :

Première itération :

On impose la condition de flux nul sur tout les points de la surface de suintement ;

Passage de l'itération j à l'itération j+1

- Cas des points à condition de flux nul à l'itération j
 - si $h > z$, on impose la condition $h = z$
 - si $h \leq z$, on maintient la condition de flux nul
- Cas des points à condition $h = z$ à l'itération j
 - si le flux est rentrant, on impose la condition de flux nul
 - si le flux est sortant, on maintient la condition $h = z$

Le flux est désigné sortant s'il est négatif ($-k \text{ grad} h \leq 0$)

Test de Convergence :

Le processus itératif est convergent lorsque à chaque pas de temps et à chaque itération la condition suivante est vérifiée :

$$\frac{h_j^i - h_{j-1}^i}{h_{j-1}^i} \leq \text{Tol} \quad \text{Tol : La tolérance qui est prise égale à } 10^{-3}$$

h_j^i : Charge hydraulique au nœud j à l'itération i

7. Validation du programme Ensat :

7.1. Barrage rectangulaire homogène sans tapis filtrant :

Pour valider notre programme élaboré, nous avons pris le même exemple traité par Ould amy. C'est le cas d'un barrage homogène carré et sans tapis filtrant. Le jeu de données pour cet exemple est donné par le tableau 1.

Tableau 1. Jeu de données

Coefficients de perméabilité	
-Horizontal k_x (m/s)	1
-Vertical k_y (m/s)	1
Paramètres :	
-A ₁	0.1
-B ₁	4.5
Nombre de nœuds :	121
Nombre d'éléments :	100
Type d'éléments :	quadrilatéraux à quatre nœuds

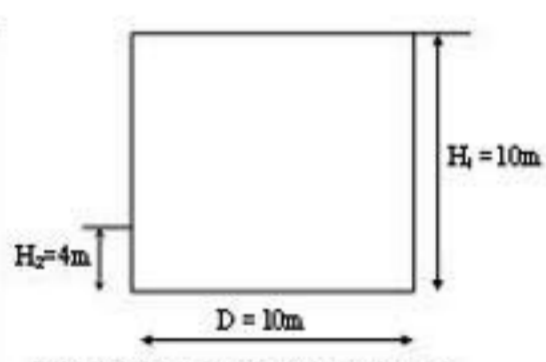


Fig 3 : Barrage carré homogène

Les résultats trouvés sont comparés à ceux trouvés à l'aide du module Nsat de CESAR-LCPC et à l'aide du programme madef (maillage déformé) (HACHEMI, 2000) Figure 3

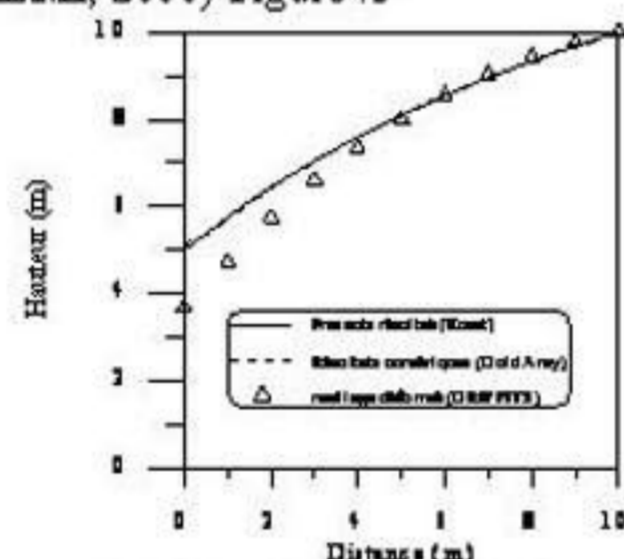


Fig 4 Écoulement permanent dans un barrage homogène carré

Le débit spécifique calculé par la formule de Dupuit :

$$q = \frac{k_x (H^2 - H_s^2)}{2D}$$

Pour cet exemple :

$$q \text{ (m}^2\text{/j)} = 4.2$$

Par contre le débit calculé à l'aide de notre programme est :

$$q_{\text{ensat}} = 4.43 \text{ m}^2\text{/j}$$

7.2 Barrage rectangulaire homogène à tapis filtrant :

Tableau 2. Jeu de données	
Tapis filtrant	
H ₁ =5m	
3m 3m	
Perméabilité	(m/s)
K _x	1
K _y	1
K _{xy}	0
A ₁	0.1
B ₁	4
Nombre des éléments	400 éléments quadrilatéraux à quatre nœuds
Nombre des nœuds	441

Fig 5 Écoulement permanent dans un barrage homogène à tapis filtrant

On remarque que la présence d'un tapis filtrant fait rabattre l'écoulement et par conséquent protéger le talus aval du barrage

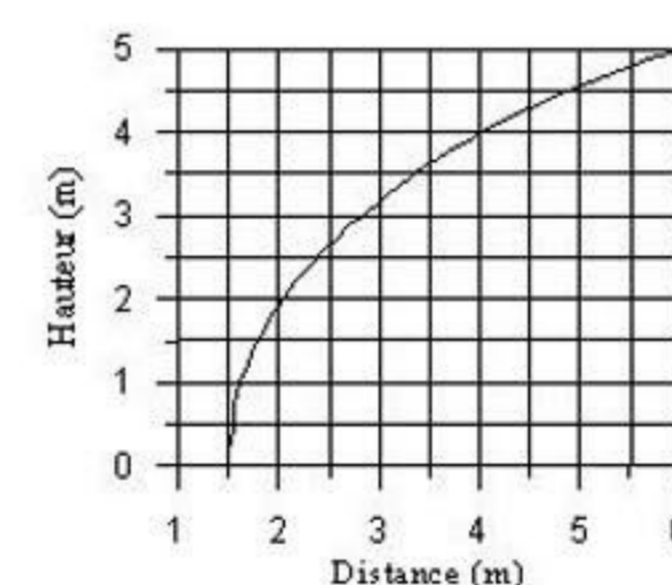


Fig 6 Écoulement permanent dans un barrage homogène à tapis filtrant

7.3 Barrage trapézoïdal sans tapis filtrant :

Le jeu de données est identique à celui de l'exemple précédent. Les résultats trouvés sont confrontés aux résultats expérimentaux trouvés par Dessai

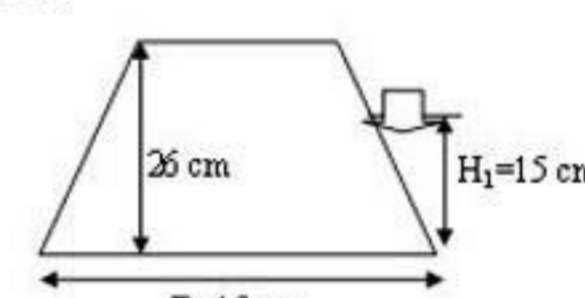


Fig 7 Barrage trapézoïdal sans tapis filtrant

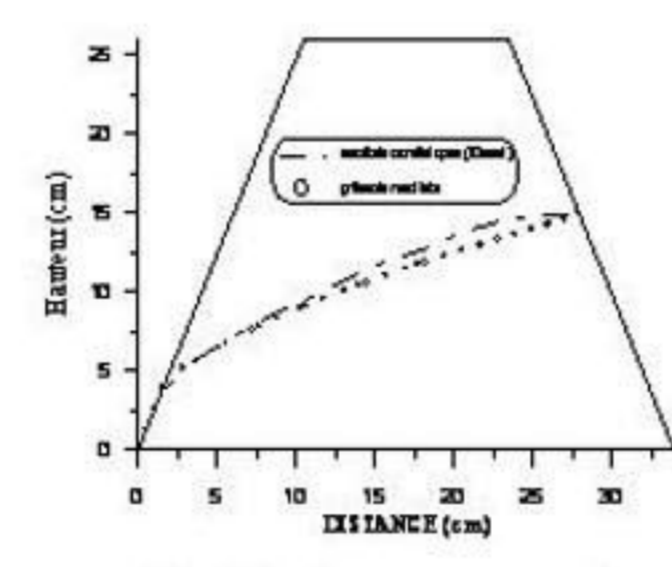


Fig 8 Écoulement permanent à travers un barrage homogène surface libre

7.4 Tracé des lignes d'équipression et les lignes d'équipotentiels

Le programme ainsi élaboré permet aussi de tracer les lignes d'équipression et les lignes de charges égales de l'écoulement permanent à surface libre. Les valeurs des charges et d'équipressions sont calculées par interpolation linéaire entre les valeurs nodales.

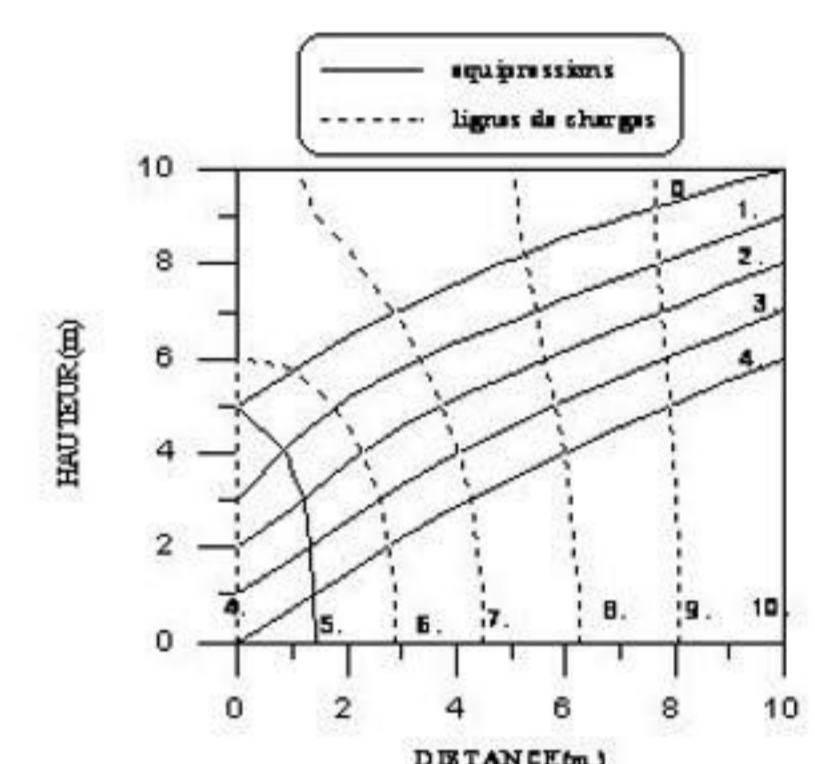


Fig 9 Lignes d'équipression et lignes de charge dans un barrage rectangulaire

Conclusion générale :

- 1- L'écoulement à travers les barrages en terre est un écoulement à surface libre régi par l'équation de Richards.
- 2- L'équation de Richards est non linéaire, la non linéarité intervient au niveau de la matrice de perméabilité qui caractérise le sol non saturé ou bien l'écoulement dans la frange capillaire.
- 3- L'application de la méthode des éléments finis et le principe variationnel à l'équation de Richards en régime permanent a conduit à la résolution d'un système différentiel non linéaire symétrique dont l'algorithme itératif de résolution est basé sur la méthode point fixe.
- 4- D'autres non-linéarités interviennent au niveau des conditions aux limites (surface de suintement et la surface libre) qui nécessitent un traitement spécifique.

Le programme Ensat élaboré dans ce travail, appliqué sur des exemples de barrages homogènes, a donné des résultats satisfaisants comparés aux résultats de certains auteurs et logiciels.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Bathé.K.J et Khoshgoftaar .MR «Finite element free surface seepage analysis without mesh iteration», Int. journal for num and anal methods in geomechanics, vol 3 pp13-22, (1979).

Cividini.A et Gioda.G. : « On the variable mesh finite element analysis of unconfined seepage problems ». Geotechnique , n° 2 pp 251-267 (1989).

Dessai .C.S. : « Free surface flow through porous media using a residual procedure » Finite element methods in fluids, Volume (5) pp 377-392, (1984).

Hachemi.A «Modélisation numérique des écoulements dans les barrages enTerre» Mémoire de Magister, (2000)

Humbert.p : « Application de la M.E.F aux écoulements en milieu poreux » Bulletin de L.C.P.C n° 132 Juin- Aout (1984).

Ould amy.M et Magnan J.P : «Modélisation numérique des écoulements et des Déformations dans les barrages en terre construits sur sol mou. » Rapport de L.C.P.C, Décembre 1991.

Sara.J.Lacy et Prevost.J.H. « Flow through porous media A procedure for locating the free surface » Int.Journal for numerical and analytical methods in geomechanics, Vol 11, 1987, pp 585-601.

Shlomo.P.Neuman et Paul.A.Witherspoon, « Finite element method of analysing steady seepage with a free surface ». Water resource research, vol 6, n°3 , pp 889-897, 1970.

Shlomo.P.Neuman, : « Saturated-unsaturated seepage by finite elements » Journal of the hydraulics & vision, Vol 99, n°hy12., pp 2233-2250, Dec (1973).

Smith I.M et Griffiths D.V : « Programming the finite element method » John Wiley & sons Ed, deuxième édition, (USA) (1988).

Vauclin.M, Khanji.D et Vachaud.G « Etude expérimentale et numérique du drainage et de la recharge des nappes à surface libre avec prise en compte de la zone non-saturée. » Journal de mécanique, Volume 15, n°6, pp 12- 36, (1976).

Zienkiewicz.P, Mayer.P et K.Cheung.Y. 'Solution of anisotropic seepage by finite elements', J.Eng.Mech.Div.,A.S.C.E. 92(EM1), 111-120, Proc. Page 4676(Fev.1966).